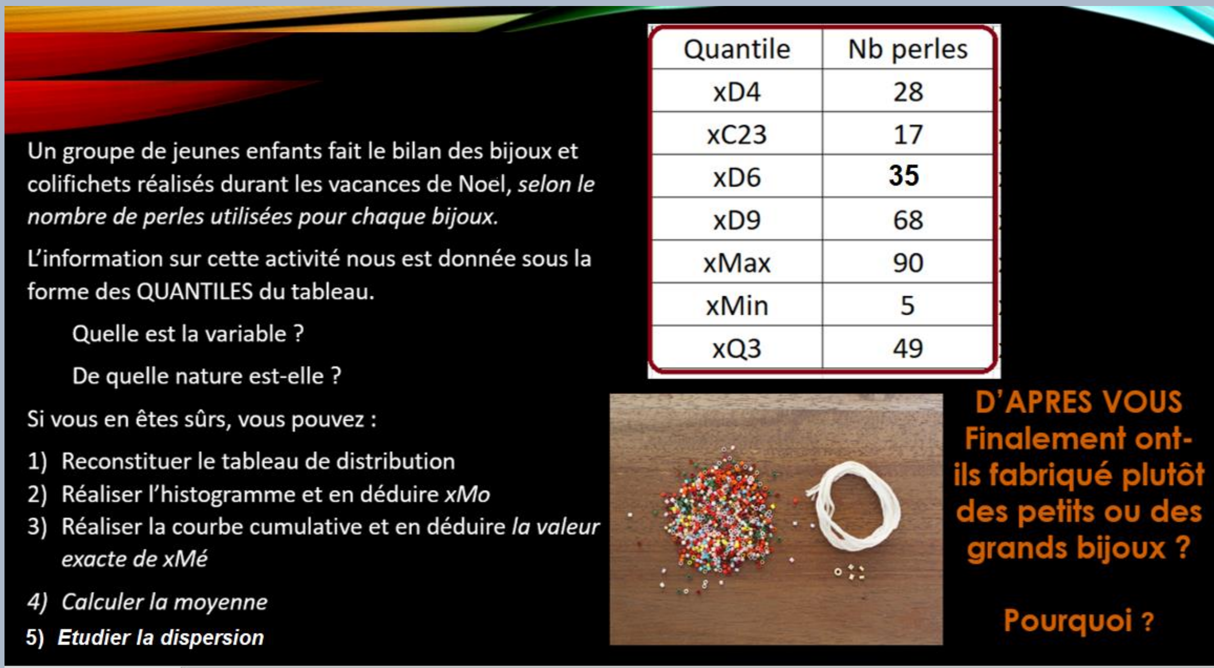
APPLI-COURS CORRIGE :

Etudier le CONTINU *(Bijoux)*



Quelle est la variable ? *Le nombre de perles par bijou*

De quelle nature est-elle ?

Mathématiquement un nombre de perles constitue une variable discrète, puisque les perles ne sont pas un objet *divisible*.

Pour le statisticien, l'échantillon étudié peut nécessiter la construction de *classes de distribution*. Ce qui est le cas dans cet exemple, où les classes sont données sous *forme de quantiles*. *Le nombre de perles est donc traité comme une variable continue*.

Vous pouvez :

1) Reconstituer le tableau de distribution
   En lisant les quantiles, il existe deux manières pour reconstituer les classes. Elles dépendent de deux lectures différentes des fréquences cumulées données par les quantiles (partie orange ci-dessous):

   a) 1ere manière : *les quantiles donnent les F(xi+)* : le pourcentages de bijoux situés sous la bornes xi+. La première borne xi+ = 17, donc la première classe est [5 ;17[

Classe (i)	xi-	xi+	F(xi+)	F(xi-)	Fi 0%	fi%	fi	ai	(fi/ai)%	Cxi	fi.Cxi
1	5	17	23%	0%	23%	23%	0,23	12	1,9%	11	2,5
2	17	28	40%	23%	40%	17%	0,17	11	1,5%	22,5	3,8
3	28	35	60%	40%	60%	20%	0,2	7	2,9%	31,5	6,3
4	35	49	75%	60%	75%	15%	0,15	14	1,1%	42	6,3
5	49	68	90%	75%	90%	15%	0,15	19	0,8%	58,5	8,8
6	68	90	100%	90%	100%	10%	0,1	22	0,5%	79	7,9
Total				100%		100%	1	85			35,6

b) 2nde manière : *les quantiles donnent les (Fxi-)* : le pourcentages de bijoux situés strictement sous la bornes xi-. La première borne xi- = 5 et la seconde est 17, donc la première classe est [5 ;17[

Classe (i)	xi-	xi+	F(xi-)	F(xi+)	Fi 0%	fi%	fi	ai	(fi/ai)%	Cxi	fi.Cxi
1	5	17	0%	23%	23%	23%	0,23	12	1,9%	11	2,5
2	17	28	23%	40%	40%	17%	0,17	11	1,5%	22,5	3,8
3	28	35	40%	60%	60%	20%	0,2	7	2,9%	31,5	6,3
4	35	49	60%	75%	75%	15%	0,15	14	1,1%	42	6,3
5	49	68	75%	90%	90%	15%	0,15	19	0,8%	58,5	8,8
6	68	90	90%	100%	100%	10%	0,1	22	0,5%	79	7,9
Total			100%			100%	1	85			35,6

Dans les deux cas, on déduit les fréquences cumulées suivantes :
Si F(xi+) ➔ F(xi-) ➔ Fi
Si F(xi-) ➔ F(xi+) ➔ Fi

1) Réaliser l'histogramme et en déduire *xMo*

L'histogramme a pour ordonnée les fréquences par unité d'amplitude *(fi/ai)% et pour abscisse* les bornes de classe (xi) à l'échelle. Le Mode est *xMo et correspond à la fréquence (fi/ai)% la plus élevée,* soit :

xMo = xi / (fi/ai)% MAX

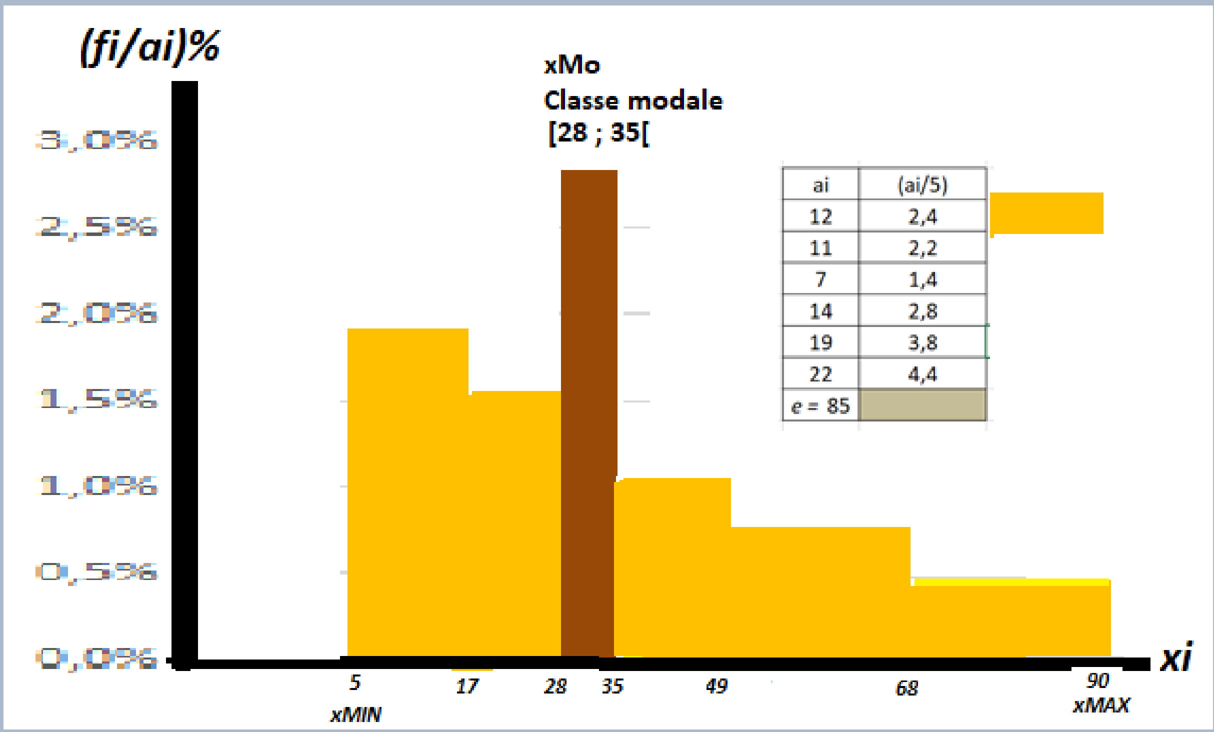
Classe (i)	xi-	xi+	ai	(fi/ai)%
1	5	17	12	1,9%
2	17	28	11	1,5%
3	28	35	7	2,9%
4	35	49	14	1,1%
5	49	68	19	0,8%
6	68	90	22	0,5%
Total			85	

L'abscisse *xi* à l'échelle :
Pour la réaliser on lit dans le tableau *l'étendue e = Σai = 85.* Pour la réaliser dans la largeur de la feuille on la divise par 5. On obtient un axe de 17 cms au total, qui doivent être répartis entre les classes, en divisant chaque *ai par* 5, soit :

ai	(ai/5)
12	2,4
11	2,2
7	1,4
14	2,8
19	3,8
22	4,4
e = 85	

La colonne (ai/5) représente la base du rectangle de chaque classe successive, en cms.

L'HISTOGRAMME



ai	(ai/5)
12	2,4
11	2,2
7	1,4
14	2,8
19	3,8
22	4,4
e = 85	

Il est possible de commencer l'abscisse xMin = 5 au point zéro. Mais la courbe cumulative étant demandée, l'abscisse ci-dessus restant la même, elle permettra de figurer le segment pointillé *xMin.* Sinon ce segment figurera dans la partie négative de l'axe d'abscisse (ce qui est aussi autorisé).

La conclusion s'écrit : *xMo = [28 ; 35[soit* Cx_3 *= 31,5 soit 31 perles* (ou 32 selon l'arrondi)

2) Réaliser la courbe cumulative en déduire *la valeur exacte de xMé*

On sait que : xMé = xi / F(xMé) = 50%

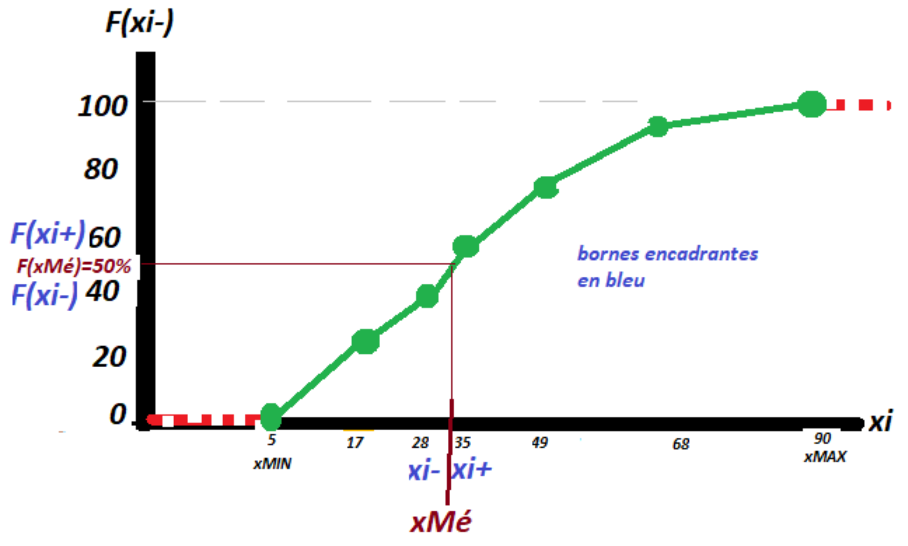
La courbe cumulative ou fonction de répartition, a pour ordonnée (Fxi-) et pour abscisse, celle de l'histogramme ((xi) à l'échelle). Chaque point est posé en récitant : *« sous si-, F(xi-) ».*

L'extrait du tableau nécessaire est :

LA FONCTION DE REPARTITION (ou Courbe cumulative)

xi-	F(xi-)
5	0%
17	23%
28	40%
35	60%
49	75%
68	90%
	100%

xMAX = 90



Elle donne (en bleu) les valeurs ou bornes encadrantes permettant d'*interpoler la valeur exacte de xMé* c'est-à-dire appliquer la formule de *xMé*.

La formule de xMé

$$xMé = xi- + \left[ai \frac{F(xMé) - F(xi-)}{F(xi+) - F(xi-)}\right]$$

Le tableau montre aussi que *xMé* se situe dans la classe 3. Ce que l'on peut lire de deux manières ci-dessous : en rouge, ou en vert. Dans tous les cas on obtient le jaune (la classe 3) :

Classe (i)	xi-	xi+	F(xi-)	F(xi+)	Fi 0%
1	5	17	0%	23%	23%
2	17	28	23%	40%	40%
3	28	35	40% F(xMé) = 50%	60%	F(xMé)=50% 60%
4	35	49	60%	75%	75%
5	49	68	75%	90%	90%
6	68	90	90%	100%	100%
Total			100%		

Courbe ou Tableau les BORNES ENCADRANTES sont :

xi- = 28 et F(xi-) = 40%

xi+ = 35 et F(xi+) = 60%

Donc

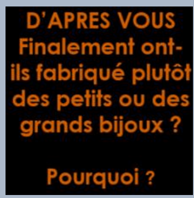
$$xMé = 28 + \left[(35-28)(\frac{50-40}{60-40})\right] = 28 + \left(7\frac{10}{20}\right) = 28 + 3{,}5$$
$$= \mathbf{31{,}5\ soit\ 30\ perles\ (ou\ 31)}$$

3) La *Moyenne* ?

La moyenne arithmétique pondérée *xbar* : $\bar{x} = \sum_{i=1}^{6} (fi \times Cxi)$

Elle est obtenue dans la colonne correspondante du tableau (voir plus haut)

$\sum_{i=1}^{6} (\boldsymbol{fi \times Cxi})$ **= 35,6 *soit 35 perles***



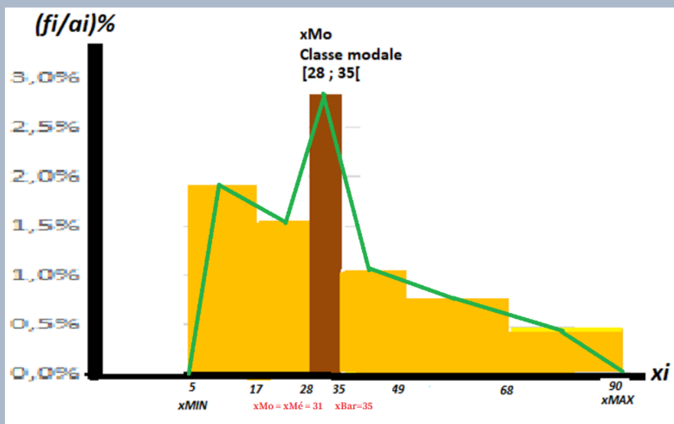
Il est vrai que l'énoncé ne dit pas si les perles utilisées sont grosses ou petites. On se fera donc une idée de leur taille, comme intermédiaire, telle que suggérée par l'image de l'énoncé.

Dans tous les cas, Il s'agit d'utiliser un commentaire statistique, pour dire s'ils ont fabriqué plutôt des bagues, des boucles d'oreilles, ou des bracelets ou des colliers, voir des diadèmes.

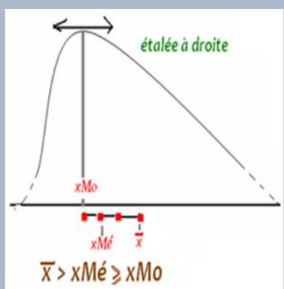
Pour cela on utilise d'abord **la relation de Pearson**.

On sait (environ) que : xMo = xMé = 31 et xbar = 35

Dans l'histogramme on illustre le *polygone des fréquences* (en vert), et on situe en abscisse les valeurs des 3 CTC :



On peut conclure que la distribution est étalée à droite, vérifiant la relation de PEARSON ci-dessous :



Finalement, à 4 perles près, les trois CTC sont quasiment égales, et tendent vers une valeur d'abscisse plutôt faible (sachant le maximum de 90 perles).
Ce qui signifie qu'ils ont fabriqué une part significative de *bagues, boucles d'oreilles, bracelets et petits colliers*.
On peut ajouter que seul 1 bijou sur 4 comporte plus de 50 perles.

etc… et avec tout cela ils ont été biens sages !!!

5) *Etudier la dispersion*

La question est : autour de la moyenne (ici 35 perles), les bijoux fabriqués sont ils fortement dispersés, ou bien regroupés et proches de 35 perles.

Le COEFFICIENT DE VARIATION (CV) donne cette dispersion. Son calcul exige celui de la VARIANCE (σ^2), puis de l'ECART TYPE (σ), car sa formule est :

$$CV = \frac{\sqrt{\sigma^2}}{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

Les calculs menés dans le tableau de distribution seront donc successivement :

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{6}(f_i . Cxi^2) - \bar{x}^2 \text{ (Théorème de } \textit{Huygens-Koenig)}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$CV = \frac{\sqrt{\sigma^2}}{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

Classe (i)	xi-	xi+	F(xi-)	F(xi+)	Fi	fi%	fi	ai	(fi/ai)%	Cxi	fi.Cxi	Cxi²	fi.Cxi²
1	5	17	0%	23%		23%	0,23	12	1,9%	11	2,5	121,00	27,83
2	17	28	23%	40%		17%	0,17	11	1,5%	22,5	3,8	506,25	86,06
3	28	35	40%	60%		20%	0,2	7	2,9%	31,5	6,3	992,25	198,45
4	35	49	60%	75%		15%	0,15	14	1,1%	42	6,3	1764,00	264,60
5	49	68	75%	90%		15%	0,15	19	0,8%	58,5	8,8	3422,25	513,34
6	68	90	90%	100%		10%	0,1	22	0,5%	79	7,9	6241,00	624,10
Total			100%			100%	1	85			35,6		1714.38

$\sigma^2 = 1714{,}38 - (35)^2$ = 1714,38 – 1225 = 489,38

$\sigma = \sqrt{489{,}38}$ = 22,12

CV = (22,12 / 35) ×100% = 0,018 × 100% = 1,8%.

La dispersion, autour de la moyenne, estimée par le CV, montre que la taille des bijoux fabriqués est regroupée autour de la taille moyenne. Ce qui confirme le commentaire précédent d'une taille plutôt petite des bijoux réalisés.

fin